Prof. Campillo

03/07/2025

1er. RECUPERATORIO 1er. PARCIAL – 1er. Cuatrimestre 2025 – Z2062

E1) Dada la curva $C = \begin{cases} x = zy + z^2 \\ z + y = 2 \end{cases}$, hallar una función vectorial que parametrice la curva C. Analizar si la recta tangente a C en $(x_0 , 1 , 1)$ tiene algún punto en común con el plano (x,y). Indique además la ecuación del plano normal a la curva en el punto antes mencionado.

E2) Dada $z = x^2 + xy$, siendo $x = -v^2 + u \quad \wedge \quad y = f(u)$ definida implícitamente por $uy + \ln(u + y) + u = 0$, resulta $z = h(u, v)$. Hallar el plano tangente a la superficie definida mediante la ecuación $z = h(u,v)$ en $(0 , 1 , z_0)$. Determinar las direcciones de derivada nula para $h(u , v)$ en $(0 , 1)$

E3) Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\ln(y+1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de f en (0,0). En caso de discontinuidad, clasificarla.

b) Analizar la existencia de derivadas parciales de f en (0,0)

c) Analizar la diferenciabilidad de f en (0,0)

E4) a) Hallar los extremos locales del campo escalar $f(x,y,z) = z^2 + (y - x)^2$ evaluado en los puntos de la superficie $z = e^{x/2}(x - 1)$

b) Hallar la curva solución de $y' - y = 0$ que pasa por el punto (1,1)

AM 2	1° parcial 1° rec. Prof. Campillo	HOJA N° 1/3 FECHA 3-7-25

(E1) Dada la curva $C: \begin{cases} x = zy + z^2 \\ z + y = 2 \end{cases}$ hallar una función vectorial que parametrice la curva C.

Analizar si la recta tangente a C en $(x_0, 1, 1)$ tiene algún punto en común con el plano xy

$\mathbb{L}$

Indicar, además, la ec. del plano normal a la curva en el punto mencionado

$$C: \begin{cases} x = zy + z^2 \longrightarrow x = z(2-z) + z^2 = 2z - z^2 + z^2 = 2z \\ z + y = 2 \rightarrow \boxed{y = 2 - z} \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2z}$$

$$z = t \longrightarrow \boxed{C: \bar{\gamma}(t) = (2t, 2-t, t) \quad t \in R}$$

$$A = (x_0, 1, 1) = \bar{\gamma}(t_0) = (2t_0, 2 - t_0, t_0) \rightarrow \begin{cases} x_0 = 2t_0 \\ 1 = 2 - t_0 \\ 1 = t_0 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\boxed{A = (2, 1, 1)} \text{ en } t_0 = 1$$

$$\bar{\gamma}'(t) = (2, -1, 1) \rightarrow \mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = (2, -1, 1)t + (2, 1, 1)$$

$$\beta(t) = (2t + 2, -t + 1, \underbrace{t + 1}_{z})$$

Plano xy $\rightarrow z = 0 \longrightarrow t + 1 = 0 \rightarrow \boxed{t = -1}$

$$\boxed{\mathbb{L} \cap \text{plano } xy = \bar{\beta}(-1) = (0, 2, 0)}$$

Plano normal a C en A $\rightarrow N = (2, -1, 1)$

$$N(x, y, z) = N \cdot A \qquad 4 - 1 + 1$$

$$(2, -1, 1)(x, y, z) = (2, -1, 1)(2, 1, 1)$$

$$\boxed{2x - y + z = 4}$$

NOTA

E2 Dada $z = x^2 + xy$ siendo $x = -v^2 + u \wedge y = f(u)$ definida implícitamente por $uy + \ln(u+y) + u = 0$, resulta $z = h(u,v)$

Hallar el plano tangente a la sup. definida mediante la ecuación $z = h(u,v)$ en $(0,1,z_0)$

Determinar las direcciones de derivada nula para $h(u,v)$ en $(0,1)$

Plano tangente a la gráfica $\underbrace{h(u,v)}_{\boxed{u=0},\boxed{v=1}}$ en $(0,1,z_0)$ $\rightarrow z_0 = h(0,1)$

$x = -v^2 + u = -1^2 + 0 \rightarrow \boxed{x=-1}$

$y = f(u) = f(0)$ definida por $uy + \ln(u+y) + u = 0$

$0 \cdot y + \underbrace{\ln(0+y)}_{0} + 0 = 0$

$0 \rightarrow \boxed{y=1}$

$\boxed{z = h(0,1) + h'_u(0,1)\, u + h'_v(0,1)\,(v-1)}$

$z = x^2 + xy$

$(-1)^2 + (-1)\,1$

$\boxed{z = 0 = h(0,1)}$

$$z \begin{cases} \rightarrow x < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ \rightarrow y \rightarrow u \end{cases}$$

$h'_u = z'_x\, x'_u + z'_y\, g'(u)$ I

$h'_v = z'_x\, x'_v$ II

$x = -v^2 + u$

$\boxed{x'_u = 1}$

$x'_v = -2v \rightarrow \boxed{x'_v(0,1) = -2}$

$(x=-1)\ (y=1)$

$z = x^2 + xy \rightarrow z'_x = 2x + y \rightarrow \boxed{z'_x = -1}$

$\rightarrow z'_y = x \rightarrow \boxed{z'_y = -1}$

$y = f(u) \rightarrow uy + \ln(u+y) + u = 0 \rightarrow G(u,y) = uy + \ln(u+y) + u$

xTFI: $y'(u) = f'(u) = -\dfrac{G'_u}{G'_y} = -\dfrac{3}{1} \rightarrow \boxed{y'_u = -3}$

$G'_u = y + \dfrac{1}{u+y} + 1 \rightarrow G'_u(0,1,1) = 3$

$G'_y = u + \dfrac{1}{u+y} \rightarrow G'_y(0,1,1) = 1$

I $h'_u(0,1) = (-1)\,1 + (-1)(-3) = -1 + 3 = 2 = h'_u(0,1)$

II $h'_v(0,1) = (-1)(-2) = 2 = h'_v(0,1)$

$\boxed{\nabla h(0,1) = (2,2)}$

Plano Tang: $z = 0 + 2u + 2\cdot(v-1) \rightarrow \boxed{PT: z = 2u + 2v - 2}$

Dir. deriv nulas $\Rightarrow \check{v} \perp \underbrace{\nabla h(0,1)}_{(2,2)} \rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = (-2,2)}\ \boxed{\vec{v}_2 = (2,-2)}$

NOTA

AM2	1° parcial 1° rec Prof Campello	HOJA N° 2/3 FECHA 3-7-25

(E3) Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \ln(y+1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de f en (0,0). En caso de discontinuidad, clasificarla

- $f(0,0) = 0$
- ¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+\ln(y+1)}{x^2+y^2} \overset{\text{analizo por } y=0}{=} \lim\limits_{xy\to 00} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

analizo por $x=0 \to \lim\limits_{(xy)\to(0,0)} \dfrac{\ln(y+1)}{y^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{\substack{xy\to 00 \\ y\to 0}} \dfrac{\frac{1}{y+1}}{2y} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \underbrace{\dfrac{1}{y+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2y}}_{\to 0} = \infty \to \nexists \lim\limits_{xy\to 00} f(x,y)$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ no es continua en } (0,0)}$

b) Analizar la existencia de derivadas parciales de f en (0,0)

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+(h,0)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{h^2 + \overset{0}{\ln(1)}}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{\underbrace{h h^2}_{\to 0}} = \infty \to \boxed{\nexists\, f'_x(0,0)}$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+(0,h)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \dfrac{\ln(h+1)}{\underbrace{h^2}_{h^3}} =$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+1}}{3h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{1}{h+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{3h^2}}_{\to 0} = \infty \to \boxed{\nexists\, f'_y(0,0)}$

c) Analizar diferenciabilidad de f en (0,0)

f no es continua en (0,0) $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ NO es diferenciable en } (0,0)}$

NOTA

E4 a) Hallar los extremos locales del campo escalar $f(x,y,z) = z^2 + (y-x)^2$ evaluado en los puntos de la sup. $z = e^{x/2}(x-1) : S$

$$z = e^{\frac{x}{2}}(x-1) \rightarrow z^2 = \left[e^{\frac{x}{2}}(x-1)\right]^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 (x-1)^2 = e^x (x-1)^2$$

$$S : \bar{\sigma}(x,y) = (x, y, \underbrace{e^{\frac{x}{2}}(x-1)}_{z})$$

$$h(x,y) = f(\bar{\sigma}(x,y)) = \underbrace{e^x (x-1)^2}_{z^2} + (y-x)^2 =$$

Hallo $(x,y) / \nabla h = \bar{0}$

$$\begin{cases} h'_x = e^x (x-1)^2 + e^x\, 2(x-1) + 2(y-x)(-1) = 0 = \\ h'_y = 2(y-x) = 0 = 2y - 2x \rightarrow \boxed{x = y} \end{cases}$$

$$h'_x = e^x (x-1)\overbrace{(x-1+2)}^{x+1} - 2(y-x) = e^x (x^2-1) - 2y + 2x = 0$$

$$x = y \Rightarrow \underbrace{e^x}_{\neq 0}(x^2-1) \cancel{-2x+2x} = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow PC_1 = (1,1) \\ x = -1 \rightarrow PC_2 = (-1,-1) \end{cases}$$

Hessiano

$h''_{xx} = e^x (x^2-1) + e^x\, 2x + 2$

$h''_{xy} = -2$

$h''_{yy} = 2$

$$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2e+2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |H_{(1,1)}| = 4e > 0 \text{ y } \overbrace{2e+2}^{h''_{xx}} > 0$$

$\boxed{h \text{ alcanza min relativo en } (1,1)}$

$h_{(1,1)} = 0$

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1}+2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |H(-1,-1)| = -4e^{-1} < 0$$

No hay extremo

NOTA

AM2	1° parcial 1° rec. Prof compello	HOJA N° 3/3 FECHA 3-7-25

E4) b) Hallar la curva solución de $y' - y = 0$ que pase por $(1,1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

integro m.a.m $\ln(y) = x + c$

$$e^{\ln(y)} = e^{x+c}$$

$e^c = k$

$$\boxed{y = k e^x}$$

pase x $(1,1) \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ $\quad 1 = k e^1 \rightarrow k = e^{-1}$

$$y = e^{-1} e^x = e^{x-1}$$

$$\boxed{y = e^{x-1}}$$

NOTA